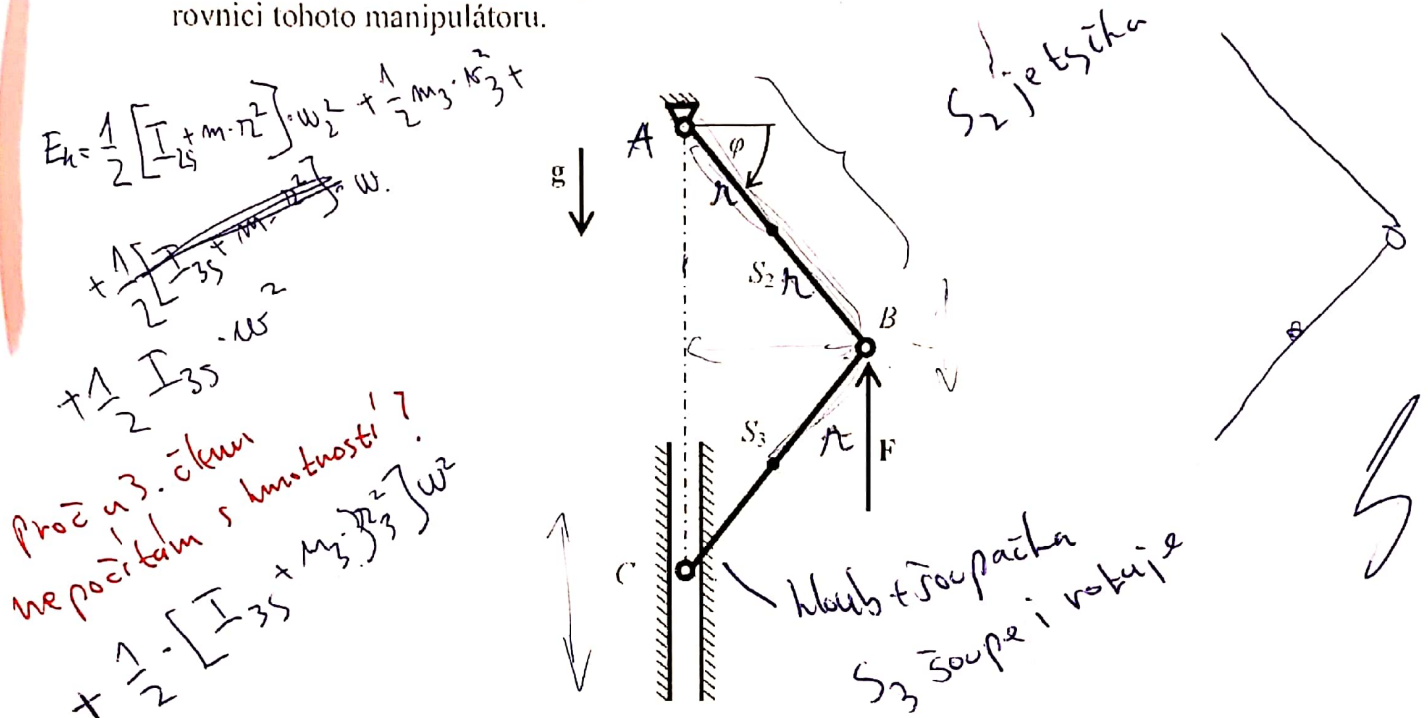


$$E_k = \frac{1}{2} [I_{25} + m \cdot r^2] \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_{35} \omega^2$$

Mechanika těles

Na obrázku je jednoduchý manipulátor, který se pohybuje v tíhovém poli a na který působí stále svislá hnací síla F . Manipulátor má 1° volnosti. Pomocí souřadnice φ sestavte Lagrangeovy rovnice II. druhu vlastní pohybovou rovnici tohoto manipulátoru.



Dáno: $AS_2 - S_2B - BS_3 = S_3C = r$, m_2 , I_{2S} , m_3 , I_{3S} , F , $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

Určete: $AS_2 - S_2B - BS_3 = r$

② Napište obecný tvar Lagrangeových rovnic II. druhu a význam symbolů v nich použitých

2. Sestavte výraz pro kinetickou energii manipulátoru

3. Určete zobecněnou sílu

4. Popište obecný způsob výpočtu Lagrangeových rovnic II. druhu, a pak sestavte vlastní pohybovou rovnici manipulátoru užitím Lagrangeových rovnic

Vliv pasivních odporů zanedbejte.

E_k - kinetická energie

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

$t = \text{čas}$

q = zobecněná souřadnice φ

Q = zobecněná síla

$\dot{q}$ = zobecněná rychlost

$t = \text{čas}$

zobecněná síla, -11- rychlost, derivace

Manipulátor - řešení

Ad 1.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

 E_k – kinetická energie q – zobecněná souřadnice Q – zobecněná síla t – čas $\dot{q}$ – zobecněná rychlost

Ad 2.

$$E_k = \frac{1}{2} (I_{S_2} + m_2 r^2) \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} I_{S_3} \omega_3^2$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}$$

$$x_3 = r \cos \varphi$$

$$\dot{x}_3 = -r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$v_3^2 = (\sin^2 \varphi + 9 \cos^2 \varphi) r^2 \dot{\varphi}^2 = (1 + 8 \cos^2 \varphi) r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left[I_{S_2} + m_2 r^2 + m_3 (1 + 8 \cos^2 \varphi) r^2 + \frac{1}{2} I_{S_3} \right] \dot{\varphi}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_{S_2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_{S_3} \omega_3^2$$

– jdu až do středu 3

$$\frac{1}{2} (I_{S_3} + m_3 (3r^2)) \omega^2$$

Ad 3.

$$Q \tilde{\omega}_2 = F 2r \tilde{\omega}_2 \cos(\pi - \varphi) + m_2 g r \tilde{\omega}_2 \cos \varphi - m_3 g \tilde{v}_{S_3,1}$$

$$\tilde{v}_{S_3,1} = -3r \tilde{\omega}_2 \cos \varphi$$

$$Q \tilde{\omega}_2 = F 2r \tilde{\omega}_2 (-\cos \varphi) + m_2 g r \tilde{\omega}_2 \cos \varphi - m_3 g (-3r \tilde{\omega}_2 \cos \varphi)$$

$$Q = (G_2 + 3G_3 - 2F) r \cos \varphi$$

Ad 4.

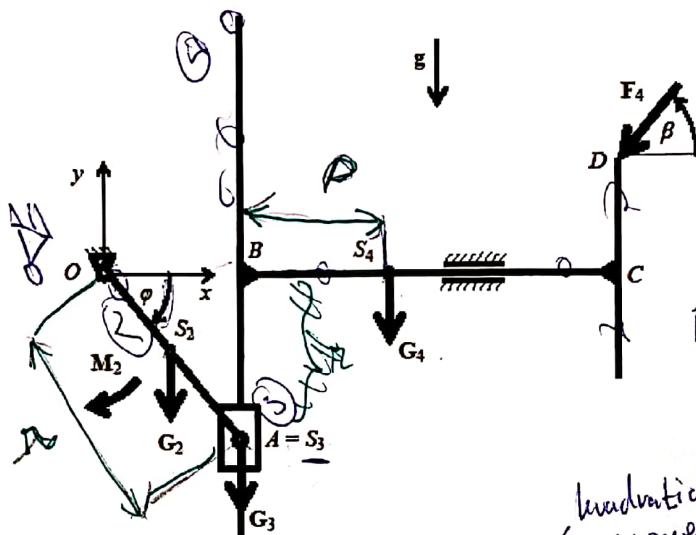
$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \left[I_{S_2} + m_2 r^2 + m_3 (1 + 8 \cos^2 \varphi) r^2 + \frac{1}{2} I_{S_3} \right] \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left[I_{S_2} + m_2 r^2 + m_3 (1 + 8 \cos^2 \varphi) r^2 + \frac{1}{2} I_{S_3} \right] \ddot{\varphi} - 16 m_3 r^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -8 m_3 r^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$\left[I_{S_2} + m_2 r^2 + m_3 (1 + 8 \cos^2 \varphi) r^2 + \frac{1}{2} I_{S_3} \right] \ddot{\varphi} - 8 m_3 r^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2 = (G_2 + 3G_3 - 2F) r \cos \varphi$$

Na obrázku je podávací mechanismus, který se pohybuje v tíhovém poli a na který působí hnací moment M_2 , silové dvojice a síla F_4 . Podávací mechanismus má 1° volnosti. Pomocí souřadnice φ sestavte Lagrangeovými rovnicemi II. druhu vlastní pohybovou rovnici tohoto mechanismu.



Dáno: $OS_2 = S_2A = r/2$, $BS_4 = p$, $S_4C = c$, $CD = d$, m_2 , I_{2S2} , m_3 , I_{3S3} , m_4 , I_{4S4} , M_2 , F_4 , β , $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

Určete:

1. Napište obecný tvar Lagrangeových rovnic II. druhu a význam symbolů v nich použitých
2. Sestavte výraz pro kinetickou energii tohoto mechanismu
3. Určete zobecněnou sílu
4. Popište obecný způsob výpočtu Lagrangeových rovnic II. druhu, a pak sestavte vlastní pohybovou rovnici mechanismu užitím Lagrangeových rovnic

Vliv pasivních odporů zanedbejte.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

E_k - kinetická energie

t - čas

q - zobecněná souřadnice - s.

$\dot{q}$ - zobecněná rychlost

Q - zobecněná síla

$$\frac{1}{2} m v^2$$

4



Podávací mechanismus - řešení

Ad 1. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$

E_k – kinetická energie

t – čas

q – zobecněná souřadnice

q

– zobecněná rychlost

Q

– zobecněná síla

Ad 2.

$$E_k = \frac{1}{2} I_{20} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2$$

$$I_{20} = I_{2S2} + m_2 \frac{r^2}{4}$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}$$

$$v_3 = r \dot{\varphi}$$

$$x_4 = r \cos \varphi + p$$

$$v_4 = -r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left(I_{2S2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2$$

Ad 3.

$$Q \ddot{\omega}_2 = M_2 \ddot{\omega}_2 + m_2 g \ddot{v}_2 \cos \varphi + m_3 g \ddot{v}_3 \cos \varphi - F_4 \cos \beta \ddot{v}_4$$

$$\ddot{v}_2 = \frac{r}{2} \ddot{\omega}_2$$

$$\ddot{v}_3 = r \ddot{\omega}_2$$

$$\ddot{v}_4 = -r \ddot{\omega}_2 \sin \varphi$$

$$Q = M_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) g r \cos \varphi + F_4 \cos \beta r \sin \varphi$$

Ad 4.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_{2S2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(I_{2S2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + 2 m_4 r^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = m_4 r^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$\left(I_{2S2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + m_4 r^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 = M_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) g r \cos \varphi + F_4 \cos \beta r \sin \varphi$$

• když je kloub tak $\omega^3 \cdot I$
• když posuvný tak $m \cdot v^2$
• 1 je váha i počtem 2, 3, 4

Rychlost je první derivace polohy

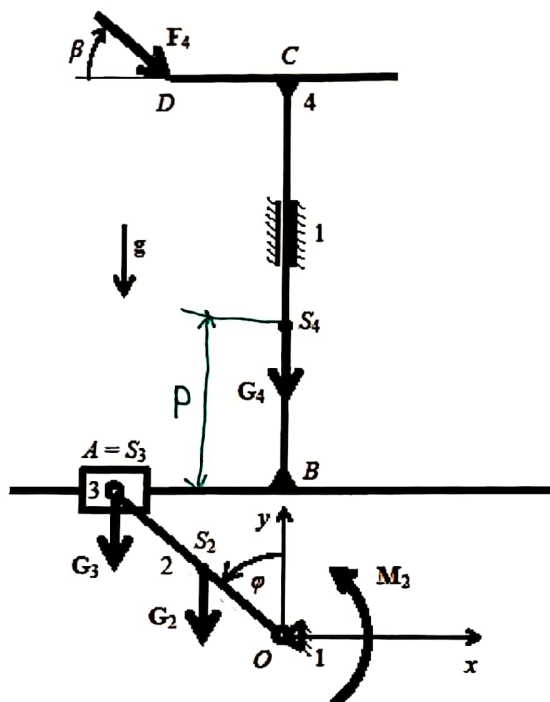
$$I_{20} = I_{2S2} + m_2 \frac{r^2}{4}$$

$$\left(\frac{r}{2} \right)^2$$

zleviny dle φ

Mechanika těles

Na obrázku je podávací mechanismus, který se pohybuje v tíhovém poli a na který působí hnací moment M_2 , silové dvojice a síla F_4 . Podávací mechanismus má 1° volnosti. Pomocí souřadnice φ sestavte Lagrangeovými rovnicemi II. druhu vlastní pohybovou rovnici tohoto mechanismu.



Potřebuji $\varphi = 0^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos$

Dáno: $OS_2 = S_2A = r/2$, $BS_4 = p$, $S_4C = c$, $CD = d$, m_2 , I_{S2} , m_3 , I_{S3} , m_4 , I_{S4} , M_2 , F_4 , β ,
 $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

Určete:

1. Napište obecný tvar Lagrangeových rovnic II. druhu a význam symbolů v nich použitých
2. Sestavte výraz pro kinetickou energii tohoto mechanismu
3. Určete zobecněnou sílu
4. Popište obecný způsob výpočtu Lagrangeových rovnic II. druhu, a pak sestavte vlastní pohybovou rovnici mechanismu užitím Lagrangeových rovnic

Vliv pasivních odporů zanedbejte.

$$1.) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

E_k - kinetická energie.

t - čas

q - zobecněná souřadnice

$\dot{q}$ - rychlost

Q - zobecněná síla

$$E_k = \frac{1}{2} \left[I_{2s2} + m_2 \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2$$

6

Podávací mechanismus - řešení

Ad 1. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$

E_k – kinetická energie

q – zobecněná rychlost

t – čas

Q – zobecněná síla

q – zobecněná souřadnice

Ad 2. $E_k = \frac{1}{2} I_{2s2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2$

$$I_{2s2} = I_{2s2} + m_2 \frac{r^2}{4}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}$$

$$v_3 = r \dot{\phi}$$

$$y_4 = r \cos \varphi + p$$

$$v_4 = -r \dot{\phi} \sin \varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left(I_{2s2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\phi}^2$$

Ad 3. $Q \tilde{\omega}_2 = M_2 \tilde{\omega}_2 + m_2 g \tilde{v}_2 \sin \varphi + m_3 g \tilde{v}_3 \sin \varphi - m_4 g \tilde{v}_4 - F_4 \sin \beta \tilde{v}_4$

$$\tilde{v}_2 = \frac{r}{2} \tilde{\omega}_2$$

$$\tilde{v}_3 = r \tilde{\omega}_2$$

$$\tilde{v}_4 = -r \tilde{\omega}_2 \sin \varphi$$

$$Q = M_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) g r \sin \varphi + F_4 \sin \beta r \sin \varphi$$

Ad 4.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{2s2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}} \right) = \left(I_{2s2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \ddot{\phi} + 2 m_4 r^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\phi}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \phi} = m_4 r^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\phi}^2$$

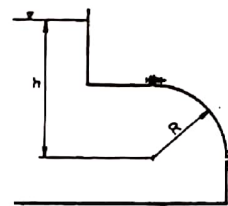
$$\left(I_{2s2} + m_2 \frac{r^2}{4} + m_3 r^2 + m_4 r^2 \sin^2 \varphi \right) \ddot{\phi} + m_4 r^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\phi}^2 = M_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) g r \sin \varphi + F_4 \sin \beta r \sin \varphi$$

13-14

7

Mechanika tekutin

Stanovte výsledný silový účinek vody na čtvrtválcové víko a stanovte úhel, který svírá s vodorovným směrem. Víko je v hloubce $h=1,3\text{m}$, má poloměr $R=0,7\text{m}$ a šířku (kolmo k nákrešně) $b=1,2\text{m}$. Hustota vody je 1000kg/m^3 a tíhové zrychlení $g=9,81\text{m/s}^2$ (viz Obr.).

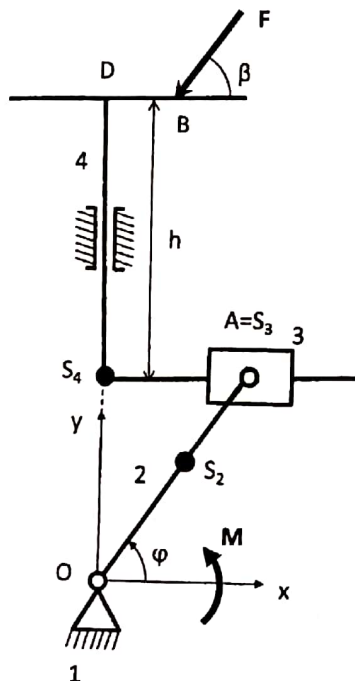
**Řešení:**

$$F_x = \rho g \left(h - \frac{R}{2} \right) R b = 1000 \cdot 9,81 \left(1,3 - \frac{0,7}{2} \right) 0,7 \cdot 1,2 = 7828,38 \text{ N}$$

$$F_y = \rho g \left(hR - \frac{\pi R^2}{4} \right) b = 1000 \cdot 9,81 \left(1,3 \cdot 0,7 - \frac{\pi \cdot 0,7^2}{4} \right) 1,2 = 6182,12 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 9975,08 \text{ N}$$

$$\tan \varphi = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varphi \doteq 57,8^\circ$$

Mechanika těles

Na obrázku je podávací mechanismus. Má 1° volnosti. Pomocí souřadnice φ sestavte Lagrangeovými rovnicemi II. druhu vlastní pohybovou rovnici tohoto mechanismu.

Všechny rozměry a hmotové veličiny jsou dány:

$h, \beta, OA = \ell, BD = d, m_2, I_{2O}, I_{2S2}, OS_2 = t_2, m_3, I_{3S3}, m_4, I_{4S4}$, kde S_2, S_3 a S_4 jsou středy hmotnosti těles 2, 3 a 4.

(pokud byste potřebovali další konstantní rozměry, zaveďte si je). Dále jsou dány síla F a moment M silové dvojice.

Určete:

1. Napište obecný tvar Lagrangeových rovnic II. druhu a význam symbolů v nich,
2. Sestavte výraz pro kinetickou energii této mechanické soustavy,
3. Určete zobecněnou sílu,
4. Popište obecný způsob výpočtu Lagrangeových rovnic a pak sestavte Lagrangeovy rovnice pro danou mechanickou soustavu.

Potřebuju $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \sin$

Řešení:

Ad 1.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

E_k – kinetická energie
 t – čas
 q – zobecněná souřadnice
 $\dot{q}$ – zobecněná rychlost
 Q – zobecněná síla

Ad 2.

$$E_k = \frac{1}{2} I_{20} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}$$

$$v_3 = 2t_2 \dot{\varphi}$$

$$y_4 = 2t_2 \sin \varphi$$

$$v_4 = 2t_2 \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2} (I_{20} + 4m_3 t_2^2 + 4m_4 t_2^2 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2$$

Ad 3.

$$Q \tilde{\omega}_2 = M \tilde{\omega}_2 - m_2 g \tilde{v}_2 \cos \varphi - m_3 g \tilde{v}_3 \cos \varphi - (F_3 \sin \beta + m_4 g) \tilde{v}_4$$

$$\tilde{v}_2 = t_2 \tilde{\omega}_2$$

$$\tilde{v}_3 = 2t_2 \tilde{\omega}_2$$

$$\tilde{v}_4 = 2t_2 \tilde{\omega}_2 \cos \varphi$$

$$Q = M - [(m_2 + 2m_3 + 2m_4)g + F_3 \sin \beta] t_2 \cos \varphi$$

Ad 4.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = (I_{20} + 4m_3 t_2^2 + 4m_4 t_2^2 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (I_{20} + 4m_3 t_2^2 + 4m_4 t_2^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} + 8m_4 t_2^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 4m_4 t_2^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$(I_{20} + 4m_3 t_2^2 + 4m_4 t_2^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} - 4m_4 t_2^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = M - [(m_2 + 2m_3 + 2m_4)g + F_3 \sin \beta] t_2 \cos \varphi$$

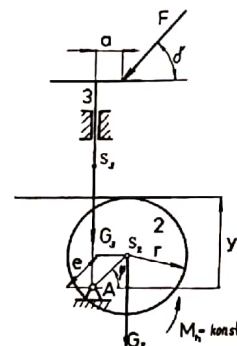
Termomechanika

V diagramech je zakreslen porovnávací oběh spalovacího pístového motoru. Jsou známy tlaky a teploty ve všech významných bodech tohoto oběhu (viz. tabulka). Pracovním médiem je vzduch

Typové příklady pro přijímací zkoušky do navazujících magisterských studijních programů

Mechanika těles

Na obrázku je vačkový mechanismus pohonu palivového čerpadla spalovacího motoru, na který působí hnací moment M_h a zátěžná síla F . Sestavte jeho vlastní pohybovou rovnici.



1. K popisu polohy soustavy zvolte nezávislou souřadnici. Vyjádřete kinetickou energii jako funkci této souřadnice a jejích časových derivací.
2. Vyjádřete zobecněnou sílu. Přitom uvažujte i vlastní tíhy členů.
3. Sestavte vlastní pohybovou rovnici vačkového mechanismu užitím Lagrangeových rovnic druhého druhu.
4. Vliv pasivních odporů zanedbejte.

Dáno: $m_2, m_3, I_{2A}, F, M_h, e, r, a, \delta, g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

Vačkový mechanismus - řešení

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

Ad 1.

$$q = \varphi$$

Ad 2.

$$E_k = \frac{1}{2} I_{2A} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}$$

$$y_3 = e \sin \varphi + r$$

$$v_3 = e\dot{\phi} \cos \phi$$

$$E_k = \frac{1}{2} (I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2$$

Ad 3.

$$Q\tilde{\omega}_2 = M_h\tilde{\omega}_2 - m_2g\tilde{v}_2\cos\varphi - (F_3\sin\delta + m_3g)\tilde{v}_3$$

$$\tilde{v}_2 = e \tilde{\omega}_2$$

$$\tilde{v}_3 = e \tilde{\omega}_2 \cos \varphi$$

$$Q = M_h - [(m_2 + m_3)g + F_3 \sin \delta]e \cos \varphi$$

Ad 4.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = (I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} + 2m_3 e^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

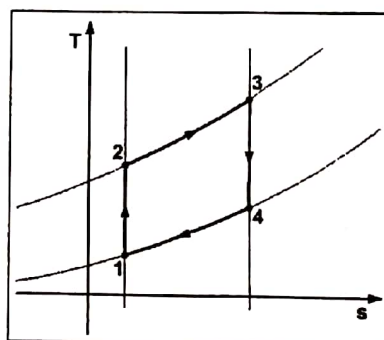
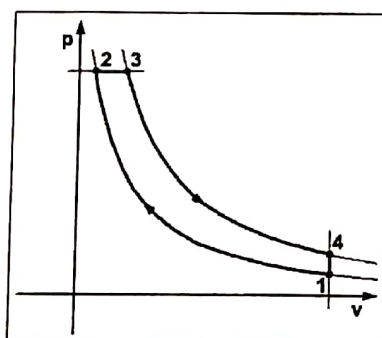
$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = m_3 e^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$(I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} - m_3 e^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = M_h - [(m_2 + m_3)g + F_3 \sin \delta] e \cos \varphi$$

Termomechanika

Příklad 2A:

V diagramech je zakreslen porovnávací oběh spalovacího pístového motoru. Jsou známi tlaky a teploty ve všech významných bodech tohoto oběhu (viz. tabulka). Pracovním médiem je vzduch ($\kappa=1,4$, $r=287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}^{-1}$). Jak se tento porovnávací oběh nazývá? Určete měrné přivedené a odvedené teplo, měrnou práci oběhu a termickou účinnost tohoto oběhu.



	1	2	3	4
p [MPa]	0,1	0,9	0,9	0,408
T [K]	288,15	539,8	1473,15	1175,1